

Beni Hassen



2013/2014

Devoir de synthèse n°2

4 M

Prof :
M.Mohamed Krir

04/03/2014

EXERCICE N°1 :(4 points)

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = 2 - x + \frac{\ln x}{x}$

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

2) Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$

a) Etudier le sens de variation de g

b) Calculer $g(1)$. En déduire le signe de g .

3) Etablir que : $\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

4)a) Montrer que la droite $D : y = 2 - x$ est une asymptote oblique à C_f .

b) Etudier la position relative de D et C_f .

c) Tracer C_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

5) Soit $\alpha \in]0, 1]$. On désigne par $A(\alpha)$ l'aire en unité d'aires du domaine limité par :

C_f , D et les droites $x = \alpha$ et $x = 1$.

a) Calculer $A(\alpha)$ en fonction de α

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(\alpha)$.

EXERCICE N°2 :(6 points)

Soit f la fonction définie sur $[-3, 3]$ par $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$.

1)a) Etudier la parité de f

- b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 3 et interpréter graphiquement le résultat.
- c) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe C_f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})
- 2) Soit Γ le cercle d'équation : $x^2 + y^2 = 9$.
- a) Etablir que $[M(x, y) \in \Gamma \text{ et } y \geq 0] \Leftrightarrow y = \sqrt{9-x^2}$.
- b) En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$.
- 3) Soit la fonction g définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $g(x) = \int_0^{3\sin x} \sqrt{9-t^2} dt$
- a) Montrer que g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et que $g'(x) = 9 \cos^2(x)$
- b) Déduire l'expression de $g(x)$ et retrouver la valeur de l'intégrale : $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$.
- 4) On pose l'ensemble (E') d'équation : $13 X^2 + 13 Y^2 - 10 X.Y - 144 = 0$ et l'application f du plan qui à tout $M(z = x + i y)$ associe le point $M'(Z' = X + i Y)$ avec : $Z' = (1 + i) z$
- a) Donner la nature de f et la caractériser.
- b) Exprimer X et Y en fonction de x et y .
- 5) Soit l'ensemble (E) tel que $f((E)) = (E')$
- a) Etablir que (E) est d'équation : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
- b) Caractériser alors (E) .
- b) Montrer que l'aire ∂ en unité d'aires du domaine limité par (E) est $\partial = 6 \pi$
- c) Déterminer la nature de (E') et le caractériser.

EXERCICE N° 3 :(5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. ABCD est un carré direct de centre O . Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [CB] et [CD] .Soient $E = S_{(CD)}(O)$ et F l'image de O par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

- 1) Soit S la similitude directe qui transforme D en C et C en E .
 - a) Déterminer le rapport k et l'angle α de S .
 - b) Soit W le centre de S . Montrer que les droites (WD) et (WE) sont perpendiculaires.
 - c) Etablir que $S \circ S(B) = D$. En déduire que les points W , B et E sont alignés.
 - d) Donner alors une construction de W .
- 2) Soit g la similitude indirecte de centre C et qui envoie B sur E .
 - a) Déterminer $g \circ S(C)$ et $g \circ S(D)$.
 - b) Montrer que l'axe de g est la médiatrice de $[EF]$
- 3) On pose $h = g^{-1} \circ S$.
 - a) Déterminer les images de D et J par h .
 - b) Montrer que h est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.

EXERCICE N°4 : (4 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on associe à tout point M d'affixe z , le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z) = z^2 - (2 + 6i)z$.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$.

- 1) Déterminer les points M tels que $f(z) = 0$
- 2) Calculer x' et y' en fonction de x et y .
- 3)a) Montrer que lorsque M' décrit l'axe des ordonnées, le point M décrit la courbe (H) d'équation : $x^2 - y^2 - 2x + 6y = 0$.
- b) Déterminer la nature de (H) et préciser son centre I .
- c) Déterminer les sommets, un foyer et sa directrice associée et les asymptotes de (H) .
- 4)a) Vérifier que le point O appartient à (H)
- b) Ecrire une équation de la tangente (T) et une équation de la normale (N) à (H) en O .

BON TRAVAIL